

Bezeichnungen:

s : Strecke Dresden-Bamberg

v_0 : Geschwindigkeit des Flugzeuges beim ersten Flug (Windstille)

T : Gesamtzeit für Hin- und Rückflug

2. Woche:

w : Windgeschwindigkeit

v' : Geschwindigkeit des Flugzeuges gegenüber Luft (also die gesuchte Grösse)

v'_1 : Geschwindigkeit des Flugzeuges über Boden bei Hinflug

v'_2 : Geschwindigkeit des Flugzeuges über Boden bei Rückflug

t'_1 : benötigte Zeit für Hinflug

t'_2 : Zeit für Rückflug

Die einzige physikalische Formel, die für diese Aufgabe benötigt wird, ist

$$s = v \cdot t$$

Setzen wir ein:

1. Woche: $t = \frac{s}{v_0}$ jeweils für Hin- und Rückflug, also Gesamtzeit

$$T = 2 \cdot t = \frac{2s}{v_0}$$

2. Woche: Die Geschwindigkeit über dem Boden ergibt sich als Summe der Geschwindigkeit in Luft und der Windgeschwindigkeit: $v'_1 = v' - w$ und $v'_2 = v' + w$. Damit ergeben sich für die Flugzeiten:

$$t'_1 = \frac{s}{v'_1} = \frac{s}{v' - w}$$

und

$$t'_2 = \frac{s}{v'_2} = \frac{s}{v' + w}$$

Ausserdem soll die Gesamtflugdauer wie in der Vorwoche sein, also $T = t'_1 + t'_2$. Darin alles einsetzen:

$$\frac{2s}{v_0} = \frac{s}{v' - w} + \frac{s}{v' + w}$$

Jetzt muss nur noch diese Gleichung nach v' aufgelöst werden.

Wie man sieht kann man die Gleichung durch s teilen, wodurch kein s mehr stehen bleibt. Die Lösung ist also unabhängig von der Streckenlänge.

Durchmultiplizieren mit Hauptnenner ($v_0(v' - w)(v' + w)$) ergibt:

$$2(v' - w)(v' + w) = v_0(v' + w) + v_0(v' - w) = v_0(v' + w + v' - w) = v_0(2v') = 2v_0v'$$

Durch 2 dividieren und linke Seite ausmultiplizieren (3. binomische Formel):

$$v'^2 - w^2 = v_0v' \quad \text{bzw.} \quad v'^2 - v_0v' - w^2 = 0$$

Diese quadratische Gleichung in v' kann nach der bekannten Formel aufgelöst werden:

$$v' = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 4 \cdot w^2}}{2}$$

Da $4w^2 \geq 0$ und damit die Wurzel grösser als v_0 ist, ist nur die Lösung mit dem $+$ -Zeichen physikalisch sinnvoll. Also ergibt sich als endgültige Formel:

$$v' = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 4 \cdot w^2}}{2}$$

Einsetzen der gegebenen Werte ($v_0 = 240 \frac{km}{h}$, $w = 50 \frac{km}{h}$):

$$v' = 120 \frac{km}{h} + \sqrt{\left(120 \frac{km}{h}\right)^2 + \left(50 \frac{km}{h}\right)^2}$$

Entweder man gibt das gleich in den Taschenrechner ein, oder man formt noch etwas um und rechnet im Kopf:

$$\begin{aligned} v' &= 120 \frac{km}{h} + 10 \cdot \sqrt{\left(12 \frac{km}{h}\right)^2 + \left(5 \frac{km}{h}\right)^2} = 120 \frac{km}{h} + 10 \frac{km}{h} \cdot \sqrt{169} = \\ &= 120 \frac{km}{h} + 10 \cdot 13 \frac{km}{h} = 120 \frac{km}{h} + 130 \frac{km}{h} = 250 \frac{km}{h} \end{aligned}$$

Die gesuchte Antwort war also $250 \frac{km}{h}$.